

源—路径—汇：自然数分拆的统一存在性理论

Hanchuen¹

2026 年 8 月

¹本专著由作者与 AI 助手（DeepSeek、Claude）协作完成；全部定义、定理、数值实验与源码见附录 B，可完全复现。

摘要

本专著提出并系统发展了一个统一的数学框架——**源—路径—汇方法** (Source-Path-Sink Method) ——用以研究自然数加性表示的存在性问题。框架的出发点是自然数 n 的全部分拆构成的“源空间” $\Pi(n)$; 通过允许元素集 $A \subseteq \mathbb{N}$ 与路径长度 k 的约束筛选, 得到“路径空间” $P_{A,k}(n)$; 存在性问题即“汇”的问题: $r_{A,k}(n) = \#P_{A,k}(n) > 0$ 是否对所有 $n \in \mathcal{N}$ 成立。哥德巴赫猜想、弱哥德巴赫定理、四平方和定理、华林问题、孪生素数猜想等均是该框架的特例。本书建立了“密度分水岭定理”: 当 $\delta(A) > 0$ 时二元表示自动成立 (Tauberian 论证); 当 $\delta(A) = 0$ 时, 主项与误差项的相对大小成为唯一判据, 困难程度由集合的代数结构决定。在此框架下, 我们系统给出 S1–S6 定理谱系 (无平方因子数、无立方因子数、互素数、 B -粗糙数的二元/三元表示), 重新证明并归位若干经典定理, 生成并分类一批新猜想, 构造二元分拆不变量族 (I1–I4) 并进行大规模数值实验, 最后讨论该框架与选择公理、可计算性、范畴论、算术几何、 $\mathbb{F}_1$ 几何、拓扑与同调、谱方法、信息论、路径积分类比、 S^6 复结构问题 (2026-08 有新近构造宣称、待核实)、考拉兹型动力路径、丢番图问题、大规模新猜想库 (N/O/P/C/D 系), 以及信息论、算法信息论、完美智能、计算复杂度与通用 AGI 的具体应用方案。本书**不宣称证明哥德巴赫猜想、孪生素数猜想、黎曼假设或 S^6 复结构存在性**; 对这些未决问题, 本书的贡献在于统一表述、困难定位、计算证据与可验证的猜想生成程序。

English

This monograph develops a unified framework—the Source–Path–Sink method—for existence problems in additive number theory. Starting from the full partition space $\Pi(n)$ of a natural number n and filtering by an admissible set A and path length k , existence questions reduce to positivity of the counting function $r_{A,k}(n)$. Goldbach’s conjecture, the ternary Goldbach theorem, Lagrange’s four-square theorem, Waring’s problem and the twin prime conjecture all appear as special cases. The monograph establishes a rigorous density watershed theorem, a systematic S1–S6 family of theorems, a new-conjecture generating program, a family of binary-partition invariants with extensive numerical experiments, and detailed connections with logic, computability, category theory, arithmetic geometry, $\mathbb{F}_1$ -geometry, topology, spectral methods, information theory, path-integral analogies, the complex-structure problem on S^6 , and AI-assisted mathematical methodology. No claim is made of a proof of Goldbach’s conjecture, the twin prime conjecture, the Riemann hypothesis, or the existence of a complex structure on S^6 .

目录

第一部分 总纲与方法论	1
第一章 引言与总纲：从哥德巴赫到统一存在性理论	3
1.1 1742 年以来的问题谱系	3
1.2 万物之理类比与本书纲领	4
1.3 源一路径一汇三要素	4
1.4 密度分水岭与三层分类	4
1.5 五个统一原理	4
1.6 S^6 复结构隐喻	5
1.7 贡献清单	5
1.8 全书结构与阅读路线图	6
1.9 诚实声明	6
第二章 预备知识与全书记号	9
2.1 集合与自然数基础	9
2.2 有序分拆与计数	9
2.3 生成函数与形式幂级数环	10
2.4 Dirichlet 级数与配分函数	10
2.5 自然密度与计数函数	11
2.6 Tauberian 定理	11
2.7 素数分布基础	12
2.8 筛法与圆法速览	13
2.8.1 筛法	13
2.8.2 圆法	13
2.9 模形式速览	13
2.10 范畴论速览	14
2.11 全书记号总表	14
2.12 状态标记与阅读约定	15

第二部分 逻辑与数学基础	17
第三章 ZFC、选择公理与截面	19
3.1 ZFC 公理系统概述	19
3.2 路径空间的集合论构造	19
3.3 纤维化与截面	20
3.4 选择公理与可数选择	20
3.5 哥德巴赫猜想的逻辑形式	20
3.6 非构造性存在 vs 构造性数学	21
3.7 希尔伯特纲领与形式化	21
3.8 截面函数的可定义性	21
3.9 模型论视角	21
第四章 可计算性、构造性与复杂度	23
4.1 递归集与判定问题	23
4.2 存在性到可计算截面	23
4.3 数值验证史（正确表述）	24
4.4 时间复杂度与实用算法	24
4.5 可计算性与可证性	24
4.6 构造性数学中的截面	25
4.7 随机化与启发式算法	25
第三部分 源—路径—汇框架	27
第五章 分拆源空间与路径空间的组合结构	29
5.1 有序分拆的组合结构	29
5.2 二元分拆（二进制分拆）	29
5.3 分拆格与 Möbius 函数	30
5.4 分拆复形：单纯复形视角	31
5.5 特殊允许元素集下的路径计数	31
5.6 完整示例	32
第六章 纤维化、范畴论与算术几何	35
6.1 范畴、函子与自然变换	35
6.2 Grothendieck 纤维化与截面	35
6.3 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 与素数作为闭点	36
6.4 层论与层上同调	36
6.5 $\mathbb{F}_1$ 几何	36

6.6	adèle 与 Tate thesis	36
6.7	范畴化的边界	37
第七章	生成函数、Abel级数与配分函数	39
7.1	形式幂级数代数	39
7.2	Abel 级数与加法卷积	39
7.3	均值定理与点态定理的鸿沟	40
7.4	零密度情形：对数奇点与模结构	41
7.5	Tauberian 词典（修正版）	41
7.6	配分函数语言	41
第四部分	密度分水岭与正密度层	43
第八章	密度分水岭定理：严格表述与证明	45
8.1	标准条件	45
8.2	均值定理	45
8.3	点态定理：局部条件与奇异级数	46
8.4	密度分水岭的完整表述	47
8.5	有效版本与显式界	47
8.6	与加性基理论的关系	47
第九章	S1–S6定理谱系与统一证明	49
9.1	统一证明模板	49
9.2	S1: 两个无平方因子数之和	49
9.3	S2: 两个无立方因子数之和	50
9.4	S3: 无平方因子 + 无立方因子	50
9.5	S4: 与固定整数互素的数	50
9.6	S5: 两个 B -粗糙数之和（奇偶性修正）	51
9.7	S6: 三个无平方因子数之和	51
9.8	谱系总表与变体	51
第十章	正密度集合的系统理论	53
10.1	局部定义集合的分类	53
10.2	有效构造算法	54
10.3	均值一点态精细理论	54
10.4	应用与局限	54
10.5	与 Erdős–Turán 纲领的关系	55

第五部分 零密度层：规则结构	57
第十一章 圆法、筛法与主项—误差动力学	59
11.1 圆法的严格框架	59
11.2 主项—误差项动力学	60
11.3 三素数定理	60
11.4 筛法与奇偶性问题	60
11.5 素数间隙：GPY–Maynard–Zhang	61
11.6 圆法与筛法的分工	61
第十二章 模形式、函数与精确表示	63
12.1 模形式基础	63
12.2 θ 函数与四平方和	63
12.3 华林问题	64
12.4 分拆函数的模性	65
第六部分 零密度无序层：核心开放问题	67
第十三章 哥德巴赫猜想：困难的结构定位	69
13.1 历史与已知事实	69
13.2 框架定位	69
13.3 困难的四重结构	70
13.4 进攻路线的现状	70
13.5 与弱哥德巴赫的对照	70
13.6 框架的”最小不可判定核”	71
第十四章 孪生素数与素数 k-元组	73
14.1 差路径框架	73
14.2 Hardy–Littlewood 素数 k -元组猜想	73
14.3 有界间隙定理	74
14.4 筛法的下界问题与奇偶性	74
14.5 大间隙	75
第十五章 黎曼假设与误差项控制	77
15.1 Riemann ζ 函数	77
15.2 RH 的等价表述	77
15.3 零点矩与随机矩阵	78
15.4 RH 与哥德巴赫问题	78

15.5 零点密度的无条件界	78
第七部分 不变量、拓扑与谱方法	81
第十六章 二元分拆不变量族与哥德巴赫关联性	83
16.1 不变量族的定义	83
16.2 数值实验	84
16.3 稳定性与区分能力	84
16.4 谱化与未来方向	85
第十七章 拓扑化、同调化与谱方法	87
17.1 路径空间的组合拓扑	87
17.2 分拆复形与同调	87
17.3 阻碍理论视角	88
17.4 谱方法	88
17.5 层论与 étale 视角	88
第八部分 信息论、物理类比与元科学	91
第十八章 信息论与物理类比	93
18.1 两种压缩方案	93
18.2 表示数的熵解释	93
18.3 通用归纳与 AIXI 的旁注	94
18.4 路径积分类比	94
18.5 密度分水岭作为相变	95
第十九章 新猜想生成程序	97
19.1 生成语法	97
19.2 筛选准则	97
19.3 T 系：差路径猜想	98
19.4 U 系：混合集合猜想	98
19.5 V 系：约束变体	98
19.6 W 系：局部条件变体	99
19.7 猜想库状态总表	99
第二十章 AI辅助数学研究的方法论：M³E 与防自欺	101
20.1 研究档案的时间线	101
20.2 自欺的解剖	101

20.3 分层纪律	102
20.4 M^3E 协议的要素	102
20.5 防自欺装置	103
20.6 AI 工具的边界	103
第二十一章 开放问题汇编	105
21.1 A 组: 正密度理论	105
21.2 B 组: 零密度无序层 (核心)	105
21.3 C 组: 几何与物理类比	106
21.4 D 组: 不变量与信息论	106
21.5 G 组: 群论与代数重构 (新增)	106
21.6 H 组: 跨学科应用	106
21.7 E 组: AI 方法论	107
21.8 难度预感表	107
第九部分 几何类比与结论	109
第二十二章 S^6 上的复结构: 几何存在性案例	111
22.1 几乎复结构与可积性	111
22.2 球面的分类	111
22.3 S^6 的 nearly Kähler 结构	112
22.4 已知约束与前沿	112
22.5 与源—路径—汇框架的类比	113
第二十三章 结论: 统一存在性理论的纲领与局限	115
23.1 框架的成就	115
23.2 本书的纠错清单	115
23.3 局限的承认	115
23.4 展望	116
23.5 结束语	116
第十部分 群论与代数重构	119
第二十四章 群论与代数重构: 对称群、元素阶与分拆的代数结构	121
24.1 自然数作为初始代数结构	121
24.2 分拆与对称群共轭类	122
24.3 元素的阶与 Landau 函数	122
24.4 指数公式与生成函数的群论证明	123

24.5 表示论视角：分拆的双重角色	123
24.6 S 谱系的置换重述	124
24.7 阶理论的其他代数编码	124
第十一部分 基本猜想与动力系统	127
第二十五章 基本猜想库：已证与未证命题的统一处理	129
25.1 素数无限多：框架的第一例子	129
25.2 合数无限多及其他”平凡无穷”	129
25.3 Dirichlet 定理与算术级数	130
25.4 孪生类：已证与未证	130
25.5 平方和类定理	131
25.6 三角数与多角数	131
25.7 华林与弱哥德巴赫	131
25.8 未证基本命题的状态表	132
第二十六章 考拉滋型路径猜想：动力系统与通用汇	133
26.1 考拉滋路径空间	133
26.2 已知事实	133
26.3 奇偶向量与 2-adic 视角	134
26.4 广义考拉滋与 C 系列新猜想	134
26.5 考拉滋与源—路径—汇的一般化	135
第二十七章 丢番图问题：约束路径与整数点	137
27.1 线性丢番图与 Frobenius 问题	137
27.2 平方和与 Pythagorean 三元组	138
27.3 Pell 方程	138
27.4 Mordell 方程	138
27.5 Fermat 方程：空路径	139
27.6 Hasse 局部—整体	139
27.7 D 系列新猜想	139
第十二部分 猜想工厂与跨学科应用	141
第二十八章 新猜想大库：N/O/P/C/D系列的系统生成	143
28.1 N 系：模板可证的新定理	143
28.2 O 系：开放与启发式猜想	144
28.3 P 系：置换/群论猜想	144

28.4 C 系与 D 系的汇总	145
28.5 N 系的证明要点补全 (demo 数值对照)	145
28.6 数值验证协议	146
第二十九章 跨学科应用：信息论、算法信息论、完美智能、复杂度与 AGI	149
29.1 信息论：表示熵与可验证拆分	149
29.2 算法信息论：算术 MDL 与 Solomonoff 预测	150
29.3 完美智能：AIXI 式猜想选择	150
29.4 计算复杂度：计数、搜索与平均情形	151
29.5 通用 AGI: M ³ E 管线与自动猜想基准	151
29.6 应用总表	152
附录 A 数值数据表	155
附录 B 计算程序与算法清单	159
B.1 统一演示框架 (demo/)	159
附录 C 记号与词汇表	161
附录 D 定理与猜想状态总表	163
附录 E 参考文献	165
附录 F 习题提示	173

第一部分

总纲与方法论

